MONOTONISITI KEPUTUSAN OPTIMAL DALAM PERMINTAAN INSURANS

Anton Abdulbasah Kamil

Pusat Pengajian Sains Matematik,
Universiti Sains Malaysia
11800 USM, Pulau Pinang
Mel-e: anton@cs.usm.my

Abstrak

Pada kertas kerja ini keputusan optimal akan dipertimbangkan untuk kes pembolehubah rawak bivariat (X,Y). Dimana pembolehubah rawak X dikawal oleh pengambil keputusan dan pembolehubah rawak Y dikawal secara eksogenous. Perhatian akan ditujukan kepada reaksi daripada pembolehubah yang dikawal oleh pengambil keputusan terhadap perubahan dari pembolehubah eksogenous. Sifat-sifat monotonisiti digunakan dan dibentuk dalam teori permintaan insurans.

Kata Kunci
Keputusan dibawah risiko, Permintaan Insurans

Pengenalan

Pembolehubah rawak bivariat (X,Y) yang dipertimbangkan bergantung kepada 2 parameter (a,b). Jawapan optimal (memaksimumkan nilai dijangka kegunaan) dapat dianalisis jika parameter b berubah-ubah secara eksogenous. Ini ialah masalah umum yang sering terdapat dalam teori duopoli dan teori produksi. Dalam kertas kerja ini kajian lebih ditumpukan kepada permintaan insurans. Terdapat Y iaitu risiko kewajipan insurans dengan liputan (*coverage*) darjah tetap eksogenous wujud. Untuk risiko yang lain, X, pengambil keputusan memilih liputan optimal. Pertanyaannya ialah: Bagaimana pengambil keputusan bertindak balas terhadap kenaikan liputan kewajipan insurans?

Teori Umum

Masalah umum dapat di sederhanakan jika andaian skala lokasi dapat dibina, contohnya untuk pembolehubah rawak taburan yang berbentuk elips.

Biar (X,Y) ialah dua pembolehubah rawak dwi dimensi. A,B $\subset \Re$ ialah parameter-parameter set dan $q: AxB \to \Re$ ialah fungsi yang ditakrif atas parameter-parameter set AxB. Untuk parameter-parameter $a \in A, b \in B$, perhatian ditujukan kepada pembolehubah univariat,

$$aX + bY + q(a,b) \tag{1}$$

Selanjutnya kita perkenalkan fungsi transformasi u, ditakrif atas julat dari pembolehubah pembolehubah rawak untuk semua $a \in A, b \in B$. Dalam pengunaannya u ialah merupakan fungsi kegunaan (*utility function*).

Untuk $b \in B$ pertimbangkan masalah optimisasi berikut (E menandakan nilai dijangka);

$$\max_{a \in A} Eu(aX + bY + q(a,b)) \tag{2}$$

kita andaikan bahawa jawapan wujud dan unik untuk setiap $b \in B$. Biar $a^*(b)$ menjadi jawapan:

$$a^* : B \rightarrow A \tag{3}$$

Perhatian kita ditujukan kepada monotonisiti fungsi a^*. Selanjutnya kita andaikan fungsi dapat dibezakan, sehingga tumpuan kita adalah tanda dari $\frac{da^*}{db}$.

Nilai dijangka untuk transformasi dari pembolehubah rawak pada (1), dapat dinyatakan sebagai,

$$H(a,b) := Eu(aX + bY + q(a,b)) \tag{4}$$

syarat perlu untuk $a^*(b)$ dari (2) untuk beberapa (sebahagian) b ialah $\frac{\partial H}{\partial a} = 0$. Oleh kerana itu dari teori fungsi mutlak (*implicit*) dapat diperoleh terbitan fungsi a^* dari (3) sebagai,

$$\frac{da^*}{db} = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b} : \frac{\partial^2 H}{\partial a^2} \right) \tag{5}$$

Perumusan Masalah Dibawah Andaian Skala Lokasi

Dalam penggunaannya tanda dari (5) tidak dapat ditentukan. Untuk kes permintaan Insurans. Tanda tersebut bergantung atas keempat terbitan pertama dari u bahkan juga untuk pembolehubah rawak tak bersandar untuk beberapa kes; dalam kes lainnya tidak dapat ditentukan semuanya. Oleh kerana itu penting untuk menyederhanakan andaian. Disini kita pertimbangkan andaian bahawa pembolehubah rawak yang ditakrifkan pada (1) hanya berbeza dalam parameter lokasi dan parameter skala (untuk $a \in A, b \in B$). Andaian ini diperkenalkan dalam teori portfolio oleh Bawa (1975) dan Owen, Rabinovitch (1983).

Biar F dan G adalah fungsi taburan longgokan dari dua pembolehubah rawak univariat. F dan G berbeza dalam parameter parameter skala-lokasi α, β, dengan $\beta > 0$, jika,

$$F(x) = G(\alpha + \beta x)\,,\ (x \in \Re)$$

Kita andaikan bahawa pembolehubah rawak $aX + bY$ $(a \in A, b \in B)$ hanya dibezakan oleh parameter-parameter skala-lokasi. Sehingga dapat kita nyatakan bahawa andaian skala-lokasi dipenuhi.

Kita tandakan nilai dijangka dan sisihan piawai sebagai berikut:

$$\mu_{ab} = E(aX + bY) \tag{6}$$

$$\sigma_{ab} = \sqrt{\operatorname{var}(aX + bY)} \tag{7}$$

Dibawah andaian ini, taburan dari pembolehubah rawak:

$$Z = \frac{aX + bY - \mu_{ab}}{\sigma_{ab}} \tag{8}$$

tidak bergantung atas a,b. Oleh kerana itu pembolehubah $\mu_{ab} + \sigma_{ab}Z$ dan $aX + bY$ mempunyai taburan yang sama. Kita takrifkan:

$$V(\mu, \sigma) := Eu(\mu + \sigma z) \tag{9}$$

Dibawah andaian skala-lokasi masalah yang sebenar pada (2) dapat digantikan menjadi:

$$\max_{a} V(\mu_{ab} + q(a,b), \sigma_{ab}) \tag{10}$$

Jika (X,Y) ialah normal bivariat, maka pembolehubah $\alpha X + \beta Y$ bergantung pada parameter-parameter lokasi dan parameter-parameter skala, dan masalah (2) setara dengan (10). Secara umum kesetaraan ini berlaku untuk pembolehubah-pembolehubah yang bertaburan dengan bentuk elips, jika ketumpatannya wujud (Owen, Rabinovitch, 1983). Vektor rawak selanjar (X,Y) ialah bertaburan dengan bentuk elips dengan parameter-parameter Δ dan Ω jika fungsi ketumpatan kebarangkaliannya dapat dinyatakan sebagai,

$$h(x,y) = c\left|\Omega\right|^{-\frac{1}{2}} Q(x,y)$$

dimana $Q(x,y)$ ialah fungsi kuasa dua dari $((x,y)-\Delta)\Omega^{-1}((x,y)-\Delta)'$ dan Ω ialah matrik terbatas positif (*positive definite matrix*). Taburan normal bivariat dan taburan t-bivariat ialah contoh dari kelas taburan taburan dwi dimensi dengan bentuk elips.

Beberapa Sifat Dari Bentuk *V*

Dibawah andaian skala-lokasi, masalah optimisasi (2) ialah setara dengan masalah (1). Sifat-sifat *V* berasal dari (lihat (9)) sifat-sifat fungsi transformasi *u* yang digunakan dalam (2). Dalam kegunaannya *u* ialah merupakan fungsi kegunaan, dan oleh sebab itu akan dibincangkan penglibatan fungsi kegunaan *u* atas fungsi *V*.

Pembezaan separa V diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = E[u'(\mu + \sigma z)], \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = E[u'(\mu + \sigma z)z], \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = E[u''(\mu + \sigma z)], \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = E[u''(\mu + \sigma z)z^2], \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \sigma} = E[u''(\mu + \sigma z)z]. \tag{15}$$

Secara umum diandaikan bahawa fungsi kegunaan *u* menjelaskan keengganan mengambil risiko (*risk aversion*): iaitu jangkaan kegunaan dari beberapa (sebahagian) bayaran rawak lebih kecil daripada kegunaan nilai dijangka pembayaran rawak. Daripada ketidaksamaan Jensen's dapat diketahui bahawa u adalah cekung. Oleh itu diandaikan:

$u' > 0$ (tetap/*monotonicity*), (16.a)

$u'' < 0$ (keengganan mengambil risiko/ *risk aversion*) (16.b)

Perbandingan (16.a) dan (16.b) dengan (11)–(15) menunjukkan bahawa tanda dari pembezaan separa ditentukan dalam kes (11)–(14). Dibawah (16.a) dan (16.b),

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} > 0, \frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0, \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} < 0, \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} < 0 \tag{17}$$

tanda dari pembezaan dalam (15) bergantung atas terbitan ketiga dari u. Bertentangan dengan terbitan pertama dan kedua, dimana tidak ada perjanjian secara umum atas tanda dari terbitan ke-tiga.

Dibawah andaian $u''' \leq 0$, persamaan (15) menjadi:

$$E(u''(\mu+\sigma Z).Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u''(\mu+\sigma z) z dF(z) = \int_{-\infty}^{0} u''(\mu+\sigma z) z dF(z) + \int_{0}^{\infty} u''(\mu+\sigma z) z dF(z)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} u''(\mu) z dF(z) + \int_{0}^{\infty} u''(\mu) z dF(z) = u''(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} z dF(z) = 0.$$

persamaan terakhir menyatakan bahawa kamiran ialah nilai dijangka dari pembolehubah rawak piawai z (lihat 8), sehingga kita mempunyai:

$$u''' \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \sigma} \leq 0 \tag{18}$$

Sering diandaikan bahawa pengukuran Arrow-Pratt dari keengganan risiko $-\frac{u''}{u'}$ adalah menyusut (*monotonically decreasing*). Hal ini menunjukkan $u''' \geq 0$ dan (18) tidak dapat diaplikasikan. Perlu dicatat, bahawa $u''' \leq 0$ ialah hanya merupakan syarat cukup untuk $\frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \sigma} \leq 0.$

Dibawah andaian (16.b), fungsi *V(m,s)* adalah cekung dan oleh kerana itu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \sigma} \right)^2 \geq 0 \tag{19}$$

Hal ini merujuk kepada Markowitz dengan pendekatan min-varians yang mana diterima secara meluas sebagai konsep untuk menganalisis masalah-masalah keputusan ekonomi. Langkah pertama pada kes ini bukan pendekatan jangkaan kegunaan setara dengan (2), tetapi langsung terhadap fungsi $W(m, s^2)$ dengan nilai dijangka m dan varians s^2 dari pembolehubah rawak yang dipertimbangkan dan fungsi W menyatakan min-varians keengganan risiko, iaitu syarat-syarat (11)–(14) dan (19) dengan s digantikan oleh s^2

untuk *W*. Kita dapat pula memperoleh fungsi $W(m,s^2)$ dari $V(m,s)$ dengan menakrifkan $W(\mu,\sigma^2):=V(\mu,\sqrt{\sigma^2})$.

Perlu dicatat bahawa, tanda dari $\frac{\partial^2 W}{\partial(\sigma^2)^2}$ tidak dapat ditentukan dengan andaian $u"<0$. Selanjutnya kecekungan dari kurva ketidakacuhan (*indifference curves*) dalam diagram (m,s^2) tidak dapat diperoleh secara umum.

Permintaan Insurans

Pada kertas kerja ini akan menggunakan asas teori permintaan insurans yang diperkenalkan oleh J. Mossin (1968), dengan mempertimbangkan masalah optimisasi sebagai berikut:

$$\max_{a'\in[o,1]} Eu(w_0 - X + a'X - P(a')) \tag{20}$$

dimana:

X ialah pembolehubah rawak yang menyatakan sebahagian daripada risiko. Iaitu jika *a'* dipilih oleh pengambil keputusan, maka dia harus membayar premium sebesar *P(a')*, dan dia akan menerima keuntungan insurans *a'X*.

w_0 menyatakan darjah deterministik daripada kesejahteraan awal. Tujuan dari pengambil keputusan ialah memilih darjah optimal daripada keseluruhan, seperti jangkaan kegunaan pada akhir period kesejahteraan ialah maksimum. Untuk *a' = 0* (*a' = 1*) kes ekstrem tidak ada insurans (insurans penuh) akan pula ditunjukkan pada kertas kerja ini.

Rumusan dasar premium ialah:

$$P(a') = (1+\lambda)a'.E(X),$$

iaitu premium = keuntungan daripada jangkaan insurans, *a'.E(X)*, darab dengan $(1+\lambda)$; λ ialah faktor beban (*loading factor*). Premium dikatakan munasabah jika sama engan nilai jangkaan daripada risiko, i.e. $P(a') = a'E(X)$.

Mossin telah membuktikan bahawa setiap risiko keengganan yang diinsuranskan tidak akan memilih keseluruhan insurans penuh jika $\lambda > 0$, iaitu *a = 1*, ialah bukan jawapan dari (20). Hasil ini berbeza terhadap kegunaan secara meluas daripada keseluruhan insurans penuh. Penjelasan daripada percanggahan ini mungkin disebabkan insurer dan pengambil insurans menggunakan taburan kebarangkalian yang berbeza untuk risiko, iaitu nilai dijangka dari risiko yang diandaikan oleh pengambil insurans lebih tinggi daripada yang diandaikan oleh insurer. Penjelasan yang lain ialah model (20) terlalu sederhana; satu gambaran yang nyata daripada model ini iaitu tidak ada risiko pada semua jika keseluruhan insurans penuh dipilih (tidak ada latar belakang risiko). Model dengan beberapa risiko ialah dalam bentuk:

$$\max_{a'\in[0,1]} Eu(w_0 - W - X - a'X - P(a')) \tag{21}$$

dengan beberapa pembolehubah rawak W. Jika W ialah bersandar dari X maka dapat ditunjukkan bahawa terdapat situasi dimana keseluruhan insuran penuh ialah optimal dengan beban positif.

Bentuk khas dari (21) diberikan jika 2 risiko yang dapat diinsuranskan, X dan Y, dipertimbangkan sebagai salah satu insurans wajib dengan keseluruhan eksogenous tetap b'. Biar $P_1(a') = P(a').P_2(b')$ ialah premium untuk keseluruhan a' dan b' untuk masing-masing risiko X dan Y. Masalah keputusan untuk darjah yang diberikan $b' \in [0,1]$ daripada insurans wajib ialah,

$$\max_{a \in [0,1]} Eu(w_0 - X + a'X - Y + b'Y - P_1(a') - P_2(b')) \tag{22}$$

dengan $a = a' - 1$, $b = b' - 1$, $q(a,b) = w_0 - P_1(1+a) - P_2(1+b)$, ini tepatnya ialah masalah pada (2).

Jawapan untuk masalah (22) hanya mungkin dalam kes khas.

Permintaan Insurans Dengan Pembolehubah Lokasi-Skala

Pertimbangkan $b \in [0,1]$, masalah (22) menjadi:

$$\max_{a \in [-1,0]} Eu(w_0 + aX + bY - P_1(1+a) - P_2(1+b)) \tag{23}$$

dibawah andaian bahawa pembolehubah rawak;

$$aX + bY \qquad (a \in [-1,0], b \in [-1,0])$$

berbeza hanya pada parameter-parameter skala-lokasi. Andaian ini mungkin hanya sesuai sebagai pendekatan dalam beberapa kes. Perlu dicatat bahawa hasil berikut bermakna jika kita mulai dengan pendekatan min sisihan piawai (lihat (9)) disamping dari pendekatan jangkaan kegunaan. Seperti yang telah ditunjukkan pada bahagian 3, p.r. piawai:

$$Z = \frac{aX + bY - \mu_{ab}}{\sigma_{ab}},$$

dengan μ_{ab}, σ_{ab} ditakrifkan pada (6),(7) tidak bergantung atas a,b $((a,b) \neq (0,0))$. Sehingga kita dapat gunakan fungsi V (lihat (9))

$$V(\mu, \sigma) = Eu(\mu + \sigma Z).$$

Masalah (23) setara dengan,

$$\max_{a \in [-1,0]} V(\mu_{ab} + w_0 - P_1(1+a) - P_2(1+b), \sigma_{ab}) \tag{24}$$

Untuk fungsi kegunaan u pada (23) kita andaikan ketegasan risiko (3.2b) ialah juga monoton. Sehingga pembezaan separa dari V mempunyai sifat-sifat (3.1a)–(3.1d) dan (3.5) adalah bermakna. Untuk lebih jelasnya kita perkenalkan fungsi berikut:

$$f(a,b) = \mu_{ab} + w_0 - P_1(1+a) - P_2(1+b),$$

$$g(a,b) = \sigma_{ab}$$

Sehingga fungsi H dari (4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H(a,b) = V(f(a,b), g(a,b))$$

Selanjutnya kita nyatakan pembezaan separa dengan indeks untuk memudahkan notasi, contohnya:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = H_1, \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial \sigma} = V_{12} \text{ dan sebagainya.}$$

Kita akan menumpukan perhatian pada tanda dari (lihat (5)):

$$\frac{da^*}{db} = -\frac{H_{12}}{H_{11}}$$

kita mempunyai:

$$H_1 = V_1 f_1 + V_2 g_1$$

dan oleh kerana itu:

$$H_{11} = V_{11} f_1^2 + V_{12} f_1 g_1 + V_1 f_{11} + V_{21} g_1 f_1 + V_{22} g_1^2 + V_2 g_{11}, \quad (25.a)$$

$$H_{12} = V_{11} f_1 f_2 + V_{12} f_1 g_2 + V_1 f_{12} + V_{21} g_1 f_2 + V_{22} g_1 g_2 + V_2 q_{12} \quad (25.b)$$

untuk pembezaan separa dari V diketahui (lihat (3.3))

$$V_1 > 0, V_2 < 0, V_{11} < 0, V_{22} < 0; \quad (26)$$

tanda dari V_{12} tidak ditentukan tanpa andaian tambahan untuk prinsip nilai jangkaan premium:

$$P_1(1+a) = (1+\lambda_1)(1+a)E(X),$$

$$P_2(1+b) = (1+\lambda_2)(1+b)E(Y)$$

kita mempunyai $(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 : f_1 \leq 0, f_2 \leq 0, f_{11} = 0$. Pada setiap kes dari pembentukan f akan diikuti oleh $f_{12} = 0$. Secara lebih umum andaian prinsip nilai jangkaan,

$$f_1 \leq 0, f_2 \leq 0, f_{11} \leq 0 \quad (27)$$

untuk terbitan g. Kita mempunyai;

$$g_1(a,b) = \frac{1}{2}(a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X,Y))^{-\frac{1}{2}}(2a Var(X) + 2b Cov(X,Y))$$

rumusan serupa juga berlaku untuk g_2.Untuk $a, b \leq 0$;

$$Cov(X,Y) \geq 0 \Rightarrow g_1 \leq 0, g_2 \leq 0 \quad (28)$$

ertinya, untuk risiko korelasi positif atau risiko yang tidak berkorelasi, sisihan piawai menysut jika satu dari cakupan ialah menokok. Begitu pula untuk sebaliknya, jika korelasi ialah negatif tetapi sangat kecil. Untuk pembezaan kedua dari g tidak ada hasil umum dapat diperoleh.

Pada sisi yang lain, jika risiko diukur dengan varians sel,ain dengan sisihan piawai, tanda dari pembezaan separa kedua dapat lebih mudah diperoleh. Varians dari period akhir kesejahteraan diberikan sebagai:

$$G(a,b) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X,Y)$$

dan oleh sebab itu:

$$G_{11} = 2Var(X),$$

$$G_{12} = 2Cov(X,Y).$$

Oleh kerana varians dari akhir period kesejahteraan adalah (sangat) cekung dan pembezaan separa campuran bergantung atas tanda dari kovarians. Tentu sahaja, tanda tersebut tidak harus berlaku untuk sisihan piawai; pada sisi yang lain semua ini dapat digunakan untuk membuat andaian. Jika kita lihat pengukuran dari (25a) dan (25b) kita mempunyai ketegasan risiko dari (26) dan (27);

$$V_{11}f_1^2 \leq 0, V_1 f_{11} \leq 0, V_{22}g_1^2 \leq 0, V_{11}f_1 f_2 \leq 0 \tag{29}$$

Untuk pengukuran yang lain, tambahan andaian diperlukan.

Pertimbangkan kes pertama bahawa risiko adalah berkorelasi secara tidak negatif dan $V_{12} \leq 0$; mengingat syarat terakhir ialah dinyatakan sebagai $u''' \leq 0$ (lihat (3.4)). Kemudian kita tambahkan pada (29) (lihat (28))

$$V_{12}f_1 g_1 \leq 0, V_{12}f_1 g_2 \leq 0, V_{22}g_1 g_2 \leq 0 \tag{30}$$

Untuk $f_{12} = 0$, ukuran $V_2 g_{11}, V_2 g_{12}$, tidak dapat ditentukan. Jika kita andaikan bahawa tanda dari g_{11}, g_{12} berhubungan dengan tanda dari varians, kita akan mempunyai:

$$g_{11} > 0, g_{12} \geq 0 \tag{31}$$

Pada kes ini tanda dari $\frac{da^*}{db}$ dapat ditentukan dan kita peroleh dari (5): dibawah (29), (30), (31) kita peroleh:

$$\frac{da^*}{db} = -\frac{H_{12}}{H_{11}} \leq 0$$

Analisis bertahap (29)-(31) menunjukkan pengukuran ditentukan oleh ketegasan risiko dan juga menunjukkan pentingnya pengukuran yang lainnya, sehingga andaian (31) menjadi kurang penting, V_2 adalah pengukuran yang terkecil, iaitu fungsi kegunaan adalah mendatar.

Tanda V_{12} pada analisis diatas menyatakan $u''' \leq 0$. Pada sisi yang lain penyusutan absolut ketegasan risiko menunjukkan $u''' \geq 0$ dan oleh kerana itu hasil diatas tidak dapat diaplikasikan kepada kelas penting ini daripada fungsi kegunaan. Kita berikan hasil dari pembezaan ketiga tanpa andaian; tambahan andaian sekarang ialah,

$$\text{sgn}(V_{12}f_1 + V_{22}g_1) = \text{sgn}(V_{12}f_2 + V_{22}g_2) \tag{32}$$

persamaan diatas harus memenuhi $V_{12} \leq 0, Cov(X,Y) \geq 0$. Jika f_1, f_2 kecil dalam pengukuran mutlak, (32) dipenuhi untuk V_{12} positif. Untuk prinsip nilai jangkaan premium (setara untuk prinsip premium lainnya dengan kadar faktor-faktor pembeban) kita mempunyai:

$$f_1(a,b) = \lambda_1 E(X),$$
$$f_2(a,b) = \lambda_2 E(Y),$$

iaitu syarat (32) lebih bermakna jika faktor-faktor pembeban λ_1, λ_2 kecil. Dari (3.5) kita tahu bahawa,

$$V_{11}V_{22} - (V_{12})^2 \geq 0$$

Dengan (31) kita mempunyai,

$$(V_{12}f_1 + V_{22}g_1)^2 + V_2V_{22}g_{11} > 0$$

$$\Leftrightarrow V_{12}^2 f_1^2 + 2V_{12}V_{22}f_1g_1 + V_{22}^2 g_1^2 + V_2V_{22}g_{11} > 0$$

$$\Rightarrow V_{11}V_{22}f_1^2 + 2V_{12}V_{22}f_1g_1 + V_{22}^2 g_1^2 + V_2V_{22}g_{11} > 0$$

$$\Rightarrow V_{11}f_1^2 + 2V_{12}f_1g_1 + V_{22}g_1^2 + V_2g_{11} < 0.$$

pernyataan terakhir sama dengan $H_{11} - V_1f_{11}$ dan oleh kerana itu kita mempunyai:

$$(31) \Rightarrow H_{11} < 0 \tag{33}$$

Selanjutnya dengan menggunakan (26), (31), (32) kita peroleh:

$$(V_{12}f_1 + V_{22}g_1)(V_{12}f_2 + V_{22}g_2) + V_{22}V_2g_{12} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow V_{12}^2 f_1f_2 + V_{12}V_{22}f_1g_2 + V_{12}V_{22}g_1f_2 + V_{22}^2 g_1g_2 + V_{22}V_2g_{12} \geq 0$$

$$\Rightarrow V_{11}V_{22}f_1f_2 + V_{12}V_{22}f_1g_2 + V_{12}V_{22}g_1f_2 + V_{22}^2 g_1g_2 + V_{22}V_2g_{12} \geq 0$$

$$\Rightarrow H_{12} = V_{11}f_1f_2 + V_{12}f_1g_2 + V_{12}g_1f_2 + V_{22}g_1g_2 + V_2g_{12} \leq 0$$

sehingga kita mempunyai:

$$(31),(32) \Rightarrow H_{12} \leq 0 \tag{34}$$

(33) dan (34) selanjutnya menyatakan:

$$(31),(32) \Rightarrow \frac{da^*}{db} \leq 0$$

Hasil ini tidak bergantung dari tanda g_1 dan g_2, dan oleh kerana itu pernyataan (28) tidak termasuk. Andaian $g_{12} \geq 0$ (lihat 31) digerakkan oleh $Cov(X,Y) \geq 0$ tetapi syarat ini tidak perlu. Sehingga hasil terakhir ini dapat juga diaplikasikan untuk risiko yang berkorelasi tidak positif. Untuk $Cov(X,Y) < 0$ kita peroleh $g_1 > 0, g_2 > 0$; pada kes ini syarat (32) selalu harus dipenuhi untuk $V_{12} \geq 0$. Untuk $V_{12} < 0$, (32) berlaku dalam kes faktor-faktor pembeban kecil. Dengan premium-premium munasabah ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), (32) berlaku jika $\operatorname{sgn} g_1 = \operatorname{sgn} g_2$.

Penghargaan

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universiti Sains Malaysia melalui Geran FRGS (di atas tajuk "*Stochastic Optimization for Financial Decision Making*").

Rujukan

Bawa, V.S. 1975. Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects. *Journal of Financial Economics*. 96-121.

Mossin, J. 1968. Aspects of Rational Insurance Purchasing. *Journal of Political Economy*. 553–568.

Owen, J., Rabinovitch, R. 1983. On the Class of Elliptical Distribution and their Applications on the Theory of Portfolio Choice. *The Journal of Finance*. 745–752.